

## Correction Devoir maison n°12

**Exercice 1 - Obligatoire Groupe 7 à 11**

*Cet exercice devra être rédigé d'une façon particulière.*

— *Tous les raisonnements devront être sous la forme :*

*Je sais que ..(Hypothèses de l'exercice, questions précédentes ...)*

*Or j'ai appris que .. (Résultat de cours recopié ou nom du théorème s'il en a un)*

*Donc je conclus que ...(Conclusion)*

*Il faut noter les phrases "Je sais que, or j'ai appris que, donc je conclus que"*

— *Toute ligne de calcul devra être justifiée en précisant la formule du cours utilisée pour passer d'une ligne à la suivante.*

*Tout manquement aux consignes sera compté comme 0 pour la question.*

1. (a) Je sais que la fonction  $h$  est un polynôme.

Or j'ai appris qu'une fonction polynôme est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc je conclus que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$h'(x) = 4x^3 - 4.$$

On étudie le signe de la dérivée :

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 &\iff 4x^3 - 4 > 0 \\ &\iff 4x^3 > 4 \quad \text{Addition de chaque côté} \\ &\iff x^3 > 1 \quad \text{Division par un nombre positif} \\ &\iff x > 1 \quad \text{Fonction } x \rightarrow \sqrt[3]{x} \text{ croissante sur } [1; +\infty[ \end{aligned}$$

Je sais que  $h'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]1; +\infty[$

Or j'ai appris qu'une fonction dont la dérivée est strictement positive est strictement croissante.

Donc je conclus que la fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

De même, Je sais que  $h'(x) < 0$  pour tout  $x \in ]-\infty; 1[$

Or j'ai appris qu'une fonction dont la dérivée est strictement négative est strictement décroissante.

Donc je conclus que la fonction  $h$  est strictement décroissante.

Je sais que la fonction  $h$  est un polynôme.

Or j'ai appris que les limites en  $\pm\infty$  d'une fonction polynôme est égale à la limite du terme de plus haut degré.

Donc je conclus que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \boxed{= +\infty} \quad \text{cours}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \boxed{= +\infty} \quad \text{cours}$$

(b) On calcule tout d'abord  $h(1) = 1 - 4 + 1 = -2$ . Je sais alors que :

— La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $] - \infty; 1[$ .

— La fonction  $h$  est continue sur  $] - \infty; 1[$

—  $h(] - \infty; 1[) = ] - 2; +\infty[$ .

Or j'ai appris le théorème de la bijection,

Donc je conclus que l'équation (E) admet une unique solution  $\alpha \in ] - \infty; 1[$ .

De même, je sais que :

- La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .
- La fonction  $h$  est continue sur  $]1; +\infty[$
- $h(]1; +\infty[) = ]-2; +\infty[$ .

Or j'ai appris le théorème de la bijection,

Donc je conclus que l'équation (E) admet une unique solution  $\beta \in ]1; +\infty[$ .

L'équation (E) :  $x^4 - 4x + 1 = 0$  admet exactement deux solutions réelles

(c) On a montré précédemment que  $\beta > 1$ .

On calcule  $h(0) = 1$ . Je sais donc que

- La fonction  $h$  est continue sur  $[0; 1[$
- $h([0; 1[) = ]-2; 1[$ .

Or j'ai appris le théorème des valeurs intermédiaire. Donc je conclus que l'équation  $h(x) = 0$  a une solution sur  $[0; 1[$ . Or comme l'unique solution de cette équation sur cet intervalle est  $\alpha$ , on a

$$\alpha \in [0; 1[.$$

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par :  $g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$ .

On définit alors une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par son premier terme  $u_0 = 0$  et la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

(a) Je sais que la fonction  $g$  est un polynôme,  
Or j'ai appris qu'une fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  
Donc je conclus que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$g'(x) = x^3$$

On résout alors  $x^3 > 0 \iff x > 0$  (la fonction  $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ).

La fonction  $x \rightarrow x^3$  est croissante sur  $]0; +\infty[$  et décroissante sur  $] - \infty; 0[$ .

Je sais que la fonction  $g$  est un polynôme.

Or j'ai appris que les limites en  $\pm\infty$  d'une fonction polynôme est égale à la limite du terme de plus haut degré.

Donc je conclus que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \quad \text{cours}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \quad \text{cours}$$

(b) Je sais que  $h(\alpha) = 0$  donc

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 4\alpha + 1 = 0 &\iff \alpha^4 + 1 = 4\alpha \\ &\iff \frac{\alpha^4 + 1}{4} = \alpha \\ &\iff g(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

(c) On montre par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  que les propositions suivantes  $\mathcal{P}_n$  :  $\{u_n \in [0; \alpha]\}$ .

- **Initialisation** : On a bien  $u_0 = 0 \in [0; \alpha[$  (énoncé)
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq \alpha \\ \implies & g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha) \quad \text{La fonction } g \text{ est croissante sur } [0; \alpha] \\ \implies & \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \alpha \\ \implies & 0 \leq u_{n+1} \leq \alpha \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \alpha$ .

(d) On résout pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n > 0 & \iff \frac{u_n^4 + 1}{4} - u_n > 0 \\ & \iff u_n^4 - 4u_n + 1 > 0 \quad \text{Multiplication par 4} \\ & \iff h(u_n) > 0 \end{aligned}$$

Or je sais que  $u_n \in [0; \alpha]$  et que la fonction  $h$  est décroissante sur  $[0; \alpha]$ . Donc

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq \alpha & \iff h(0) \geq h(u_n) \geq h(\alpha) \\ & \iff 1 \geq h(u_n) \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

Or j'ai appris qu'une suite  $(u_n)$  est croissante si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0$ ,  
Donc

la suite  $(u_n)$  est croissante.

- (e) Je sais que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $\alpha$ .  
Or j'ai appris le théorème de convergence monotone.  
Donc je conclus que la suite  $(u_n)$  est convergente.

Je sais que la suite  $(u_n)$  est convergente (on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ).

Or j'ai appris le théorème du point fixe,

Donc je conclus que  $\ell$  vérifie l'équation  $\ell = g(\ell)$ . Et l'on sait que l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$  sur  $[0; 1[$  est  $\alpha$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

```
(f) u = 0
n = input("Entrez un entier n")
for k = 1:n
    u = (u^4+1)/4
end
disp(u)
```

Ecrire un programme en Scilab qui demande une entier  $n$  à l'utilisateur et qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

## Exercice 2 - Loïs de probabilités - Groupes 10 et 11

Reprendre la correction sur la feuille de TD.

## Exercice 3 - Groupe 3 à 11

1. Soit  $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$ .

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. La fonction  $x \rightarrow \ln(1+x)$  est une fonction concave. La tangente à la fonction  $x \rightarrow \ln(1+x)$  au point  $x=0$  est  $y=x$ . La fonction est en dessous de toute ses tangentes donc

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x$$

On pose la fonction  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Donc pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

La fonction  $f'$  est positive et donc  $f$  est strictement croissante. De plus  $f(0) = 0$  ainsi pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f(x) \geq 0 \iff \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{pour tout réel } x \text{ positif ou nul on a : } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

3. On a d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} &\leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \\ \iff \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} &\leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \iff \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} &\leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente (donc la série est convergente) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}\ln(v_n) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \\ &= u_n\end{aligned}$$

Et donc  $v_n = e^{u_n}$ . La suite  $(u_n)$  est convergente et tend vers  $\frac{1}{2}$  donc la suite  $v_n$  est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^{1/2}.$$

```
5. n = input("entrez un entier n")
u = 0
v = 1
for k = 1:n
    u = u + log(1+ k/n^2)
    v = v * log(1+ k/n^2)
end
disp(u)
disp(v)
```

## Exercice 4 - Lois de probabilités - Groupes 1 à 9

Le but de cet exercice est de calculer des sommes liées à des lois de probabilités qui ne sont pas au programme d'ECE. Comme dans l'exercice 17 de la feuille d'exo 19, si l'on dispose de la valeur de  $P(X = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , on cherchera à vérifier que  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)$  et à calculer  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$  et

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n).$$

1. Loi logarithmique : La loi logarithmique est donnée pour un paramètre  $p \in ]0; 1[$  par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k}$$

(a) On pose la fonction  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1}$ . On a alors

$$f_n(x) = x^0 \times \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

(b) En intégrant la somme d'une part

$$\begin{aligned}\int_0^p f_n(x) dx &= \int_0^p \sum_{k=1}^n x^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^p x^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{x^k}{k} \right]_0^p \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k}\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\int_0^p f_n(x) dx &= \int_0^p \frac{1-x^n}{1-x} dx \\ &= \int_0^p \frac{1}{1-x} dx - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= [-\ln(1-x)]_0^p - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= -\ln(1-p) - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k} = -\ln(1-p) - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx}$$

(c) Pour  $x \in [0; p]$ , on a

$$\begin{aligned}1-x > 1-p &\iff 0 < \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-p} \\ &\iff 0 < \frac{x^n}{1-x} < \frac{x^n}{1-p} \\ &\implies 0 < \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx < \int_0^p \frac{x^n}{1-p} dx \\ &\implies 0 < \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx < \frac{1}{1-p} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^p \\ &\implies 0 < \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx < \frac{p^{n+1}}{(1-p)(n+1)} < \frac{1}{(1-p)(n+1)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{0 \leq \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{(n+1)(1-p)}}$$

(d) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(1-p)} = 0$ . D'après le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx = 0.}$$

(e) On écrit les sommes partielles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n P(X = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \left( -\ln(1-p) - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx\end{aligned}$$

Or on a vu précédemment que  $\int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx = 0$ . Donc la série  $\sum_{k \geq 1} P(X = k)$  converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1}$$

(f) On s'intéresse à  $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ , c'est à dire  $\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{\ln(1-p)} p^k$ . Or la série  $\sum_{k \geq 1} p^k$  est une série convergente et donc  $\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{\ln(1-p)} p^k$  est une série convergente et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} p^k - 1 \right) \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \left( \frac{1}{1-p} - 1 \right) \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \times \frac{p}{1-p} \\ &= \boxed{\frac{-p}{(1-p)\ln(1-p)}} \end{aligned}$$

On s'intéresse à  $\sum_{k \geq 1} k^2 P(X = k)$ , c'est à dire  $\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{\ln(1-p)} kp^k$ . Or la série  $\sum_{k \geq 1} kp^{k-1}$  est une série géométrique dérivée convergente et donc  $\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{\ln(1-p)} kp^k$  est une série convergente et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) &= \frac{-p}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= \frac{-p}{\ln(1-p)} \times \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \boxed{\frac{-p}{(1-p)^2 \ln(1-p)}} \end{aligned}$$

2. Loi Zêta de Riemann. En probabilité, on dit qu'une variable aléatoire suit une loi zêta de paramètre  $s$  si

$$P(X = k) = \frac{k^{-s}}{\zeta(s)}$$

où  $\zeta$  est la fonction zêta de Riemann défini par  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

(a) Une série de Riemann est définie pour  $s > 1$  donc

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est définie pour } s > 1}$$

(b) On considère  $s > 1$  et on s'intéresse à la série  $\sum_{k \geq 1} P(X = k)$ , c'est à dire  $\sum_{k \geq 1} \frac{k^{-s}}{\zeta(s)}$ . Or la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$  est une série de Riemann convergente et donc  $\sum_{k \geq 1} P(X = k)$  est convergente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} \boxed{= 1} \end{aligned}$$

- (c) On s'intéresse à la série  $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ , c'est à dire  $\sum_{k \geq 1} \frac{k^{1-s}}{\zeta(s)}$ . Or la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{s-1}}$  est une série de Riemann convergente si  $s - 1 > 1$ , c'est à dire  $s > 2$ . Donc  $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$  est convergente pour  $s > 2$  et dans ce cas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{1-s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s-1}} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

- On s'intéresse à la série  $\sum_{k \geq 1} k^2P(X = k)$ , c'est à dire  $\sum_{k \geq 1} \frac{k^{2-s}}{\zeta(s)}$ . Or la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{s-2}}$  est une série de Riemann convergente si  $s - 2 > 1$ , c'est à dire  $s > 3$ . Donc  $\sum_{k \geq 1} k^2P(X = k)$  est convergente pour  $s > 3$  et dans ce cas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X = k) &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{2-s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s-2}} \\ &= \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

### Exercice 5 - Issue de EDHEC - Groupes 1 à 6

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

1. On a  $u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$  et  $u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$  et  $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4}$

2. (a) On a  $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}u_n \geq u_n$  car  $u_n \geq 0$  donc la suite est croissante et comme  $u_0 = 2$

Conclusion :  $u_n \geq 2$  :

(b)  $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$  et on a vu Conclusion : la suite est croissante

3. (a) Soit  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .

$g$  est dérivable sur  $]-1; +\infty[$  et  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

$x$	-1	-	0	+	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$	-	0	$\searrow$

Donc  $g(x) \leq 0$  et Conclusion :  $\forall x > -1$ , on a :  $\ln(1+x) \leq x$ .

On pouvait aussi utiliser la concavité de  $x \rightarrow \ln(1+x)$  dont la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation  $y = x$

(b) Comme produit de termes strictement positifs,  $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

Et comme  $1 + \frac{1}{2^k} > 1$  alors  $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$  et

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 2$$

Conclusion :  $\ln(u_n) \leq 2$  pour tout entier  $n$

4. On a donc  $u_n \leq e^2$ .

et comme la suite est croissante et majorée par  $e^2$  (et minorée par 2), elle converge vers une limite  $\ell \in [2, e^2]$

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général  $(\ell - u_n)$ .

(a) Comme  $\ell > 0$  alors  $\ln$  est continue en  $\ell$  donc  $\ln(u_n) \rightarrow \ln(\ell)$

Or  $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$  donc  $\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \rightarrow \ln(\ell)$  quand  $n \rightarrow +\infty$

ce qui signifie que la série  $\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$  converge et que

Conclusion :  $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

(b) Comme  $u_n$  et  $\ell$  sont strictement positifs,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

(c) Et comme  $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$  alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ .

(d) On a vu que la suite  $u$  était croissante donc  $\ell - u \geq 0$  et de l'autre coté :

$$\ell - u_n - \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}}$$

et de  $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$  on tire  $\frac{\ell}{u_n} \leq e^{1/2^n}$  soit  $\ell - u_n e^{1/2^n} \leq 0$  donc  $(-u_n + \ell e^{-1/2^n}) e^{1/2^n} \leq 0$

Finalement  $\ell - u_n - \ell\left(1 - e^{-1/2^n}\right) \leq 0$  et

Conclusion :  $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-1/2^n}\right)$ .

(e)  $g(x) = 1 - e^{-x} - x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = e^{-x} - 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$\searrow +$	$0 \searrow -$
$g(x)$		$\nearrow -$	$0 \searrow -$

Donc  $g(x) \leq x$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a  $1 - e^{-x} \leq x$ .

$1 - e^{-1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  et finalement

Conclusion :  $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$ .

Comme la série de terme général  $\frac{1}{2^n}$  est convergente, alors par majoration de termes positifs,

Conclusion : la série de terme général  $(\ell - u_n)$  est également convergente.

## Exercice - Issue de ESSEC - Groupe 1 et 2

Dans cette première partie on considère un ensemble discret  $\mathcal{K}$  dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ .  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble de toutes les parties de  $\mathcal{K}$  et pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on note  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $\mathcal{K}$ .

Soient  $P$  et  $Q$  deux lois de probabilité sur  $\mathcal{K}$ . (**N.B.** en fait, ce sont des probabilités) Pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , on pose  $p_k = P(\{k\})$  et  $q_k = Q(\{k\})$ . On rappelle que pour tout  $k \in \mathcal{K}$ ,  $p_k \geq 0$ , avec  $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1$ .

De plus toute probabilité  $P$  est entièrement déterminée par la donnée de  $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$  puisque pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$

Lorsque  $\mathcal{K}$  est fini on définit la distance en variation entre les probabilités  $P$  et  $Q$  par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| \quad ((i))$$

1. Lorsque  $\mathcal{K} = \{0; 1\}$

on a  $D(P, Q) = \frac{1}{2} (|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|)$

et comme  $p_0 + p_1 = 1$  on a donc  $p_0 = 1 - p_1$  et  $q_0 = 1 - q_1$ .

Donc  $D(P, Q) = \frac{1}{2} (|q_1 - p_1| + |p_1 - q_1|) = |p_1 - q_1|$  (car  $|-x| = |x|$  pour tout  $x$  réel)

2. Lorsque  $\mathcal{K} = \mathbb{N}$ ,

Pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , on a  $0 \leq |p_k - q_k| \leq |p_k| + |q_k| = p_k + q_k$  (inégalité triangulaire)

Comme les séries de terme général  $p_k$  et  $q_k$  convergent, celle de terme général  $p_k + q_k$  également.

Et par majoration des termes positif d'une série,

Conclusion : la série de terme général  $|p_k - q_k|$  converge.

On étend donc la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où  $\mathcal{K} = \mathbb{N}$ .

3. Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on a  $0 \leq P(A) \leq 1$  et  $0 \leq Q(A) \leq 1$

Donc  $-1 \leq P(A) - Q(A) \leq 1$  d'où  $|P(A) - Q(A)| \leq 1$  (équivalent en fait)

Conclusion :  $|P(A) - Q(A)| \in [0, 1]$ .

4. Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,

$P(A) = \sum_{k \in A} p_k$  et en s'inspirant de la question 1)  $\sum_{k \in A} p_k = 1 - \sum_{k \in \bar{A}} p_k$  (et de même pour  $Q$ )

Donc  $P(A) - Q(A) = \sum_{k \in A} (p_k - q_k)$  d'une part

et  $P(A) - Q(A) = 1 - \sum_{k \in \bar{A}} p_k - 1 - \sum_{k \in \bar{A}} q_k = \sum_{k \in \bar{A}} (q_k - p_k) = -\sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k)$  d'autre part.

Donc

$$\begin{aligned} 2|P(A) - Q(A)| &= |P(A) - Q(A)| + |P(A) - Q(A)| \\ &= \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) \right| \end{aligned}$$

5. On a  $D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|$  et  $\mathcal{K} = A \cup \bar{A}$  (disjointe)

Donc  $D(P, Q) = \frac{1}{2} (\sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k|)$

Et comme  $\sum_{k \in A} |p_k - q_k| \geq |\sum_{k \in A} p_k - q_k|$  alors

$$\begin{aligned} 2D(P, Q) &\geq \left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| \\ &\geq 2|P(A) - Q(A)| \end{aligned}$$

Conclusion :  $\boxed{\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, |P(A) - Q(A)| \leq D(P; Q)}$

6. Soit  $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$

On a alors pour tout  $k \in A : |p_k - q_k| = -(p_k - q_k)$  et pour  $k \in \bar{A}, |p_k - q_k| = p_k - q_k$  (car dans  $\bar{A}, q_k \geq p_k$  est faux)

Donc

$$\begin{aligned} D(P, Q) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( - \sum_{k \in A} p_k - q_k + \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| \right) \\ &= |P(A) - Q(A)| \end{aligned}$$

car  $\sum_{k \in A} p_k - q_k \leq 0$  et  $\sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \geq 0$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{avec } A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\} : |P(A) - Q(A)| = D(P; Q)}$

7. On réutilise la question précédente :

Avec  $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$  on a  $D(P, Q) = |P(A) - Q(A)|$

Or pour  $k \in A : p_k \wedge q_k = p_k$  et pour  $k \in \bar{A} : p_k \wedge q_k = q_k$ .

Donc

$$\begin{aligned} 1 - \sum (p_k \wedge q_k) &= 1 - \sum_{k \in A} p_k - \sum_{k \in \bar{A}} q_k \\ \text{et comme } 1 - \sum_{k \in A} p_k &= P(\bar{A}) = \sum_{k \in \bar{A}} p_k \text{ alors} \\ 1 - \sum (p_k \wedge q_k) &= \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k = Q(A) - P(A) \end{aligned}$$

comme on l'a vu en 4

Et comme ici  $Q(A) - P(A) = \sum q_k - p_k \geq 0$  et  $Q(A) - P(A) = |P(A) - Q(A)|$  on a bien finalement :

Conclusion :  $\boxed{D(P; Q) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \wedge q_k}$

8. On considère un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  tel que  $X$  soit de loi  $P$  et  $Y$  soit de loi  $Q$ .  
Autrement dit, pour tout  $k \in \mathcal{K}$ ,

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y = k) = q_k$$

Le  $D(P; Q) = 1 - \sum (p_k \wedge q_k)$  suggère de passer par l'événement contraire.

(L'événement  $X = Y$  est d'autre part plus facile à décomposer que  $(X \neq Y)$  )

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y)$$

On décompose  $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} (X = k \cap Y = k)$  (disjointe) donc  $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$

Et comme  $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq \mathbf{P}(X = k) = p_k$  (car  $(X = k \cap Y = k) \subset (X = k)$  )

et  $Q(X = k \cap Y = k) \leq Q(Y = k) = q_k$

alors  $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$  est inférieur au plus petit des deux :

$$\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq p_k \wedge q_k$$

et en assemblant :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbf{P}(X = Y) \\ &= 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \\ &\geq 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \wedge q_k = D(P, Q) \end{aligned}$$

Conclusion :  $\boxed{D(P; Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)}$